

# 基于小波平衡的非线性电路稳态模拟

李 昕, 胡 波, 凌 燮 亭

(复旦大学专用集成电路与系统国家重点实验室, 上海 200433)

摘 要: 本文提出一种基于小波理论的非线性电路稳态模拟算法——小波平衡法。该方法在时域中求解电路稳态响应, 克服了频域模拟算法由于谐波次数较高导致计算量很大的缺点, 具有复杂度低, 精度高, 存在一个自适应算法自动选择模拟阶数等优点。模拟结果证明, 本文的小波平衡法是一种十分有效的方法。

关键词: 小波平衡; 非线性电路; 稳态模拟

中图分类号: TP317 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2001)06-0792-04

## A Wavelet Balance Approach for Steady State Analysis in Nonlinear Circuits

LI Xin, HU Bo, LING Xie ting

(ASIC & System State Key Lab, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: This paper provides a novel wavelet balance approach for steady state analysis in nonlinear circuits. Because the proposed simulation algorithm is performed in time domain, it can overcome most of the disadvantages of the frequency domain based methodology, and result in low computational complexity and high simulation precision. Furthermore, an adaptive scheme can be employed to automatically determine the wavelet order in simulation. Some experimental results prove the proposed method to be an effective one.

Key words: wavelet balance; nonlinear circuits; steady state analysis

### 1 引言

在 RF 和微波集成电路的分析设计中, 经常需要了解一些非线性动态电路在固定周期性激励下的稳态响应波形, 例如电源电路、高 Q 值放大器、调制解调与振荡电路等<sup>[1]</sup>。对于这类问题, 采用经典的时域模拟算法<sup>[2]</sup>求解电路状态方程往往需要花费大量时间用于瞬态过程的计算, 导致模拟效率很低。

近二十年来, 许多文献报道了直接计算非线性动态电路稳态响应的方法<sup>[3~11]</sup>。这些方法可分为三类: Shooting Method<sup>[3~5]</sup>、Hamonic Balance Method (HB)<sup>[6~7]</sup> 和 Sample Balance Method (SB)<sup>[8~11]</sup>。其中, Shooting Method 的基本思想是求取电路的一个特殊初始状态  $X(0)$ , 从该状态出发电路直接进入稳态响应时期, 即电路状态变量  $X(t)$  满足边界条件

$$X(T) = X(0) \quad (1)$$

这里,  $T$  为稳态响应周期。由于该方法需要计算数值积分, 因此复杂度很高。Hamonic Balance Method 将电路状态变量  $X(t)$  近似写成 Fourier 级数展开的形式

$$X(t) = \sum_{k=-N}^N X_k \cdot e^{j2\pi kt/T} \quad (2)$$

通常,  $N$  必须取得足够大, 以保证高于  $N$  次的谐波可以忽略不计。同时, HB 算法在模拟中需要反复计算 DFT 和 IDFT, 导致复杂度较高。第三类方法 Sample Balance Method 将电路状态变量  $X(t)$  在时域中分解为基函数叠加的形式, 并且以基函数系数作为未知数求解。但是, SB 算法中对基函数的选择非常关键, 不合适的基函数导致逼近精度很低, 而且对于给定的计算精度往往很难预先或自动确定需要的基函数数目。

本文将 FWC (Fast Wavelet Collocation Method)<sup>[12~14]</sup> 引入到非线性电路稳态模拟中, 提出一种新的稳态模拟算法——Wavelet Balance Method (WB), 其优点在于:

- (1) 逼近速度是  $O(h^4)^{[12~14]}$ ,  $h$  为采样步长, 因此只需要比较少的采样点 (即比较少的基函数) 就能够达到足够的精度, 计算复杂度较低。
- (2) 在时域中对电路求解, 因此电路的非线性和高次谐波等难以在频域中有效处理的问题能容易被模拟, 例如可以很好的分析多谐激励信号的情形。
- (3) 存在自适应算法自动判断在给定的模拟精度要求下需要的小波逼近阶数。而且由于小波基函数的紧支柱性, 只需要在电路状态变量  $X(t)$  变化迅速的时间区间使用高阶小波模拟。

## 2 基于小波平衡的稳态模拟算法

### 2.1 FWCM 简介

令非线性动态电路的状态方程为

$$dX/dt = f(X, t) \quad (3)$$

其中,  $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)]^T$  是  $N$  维状态变量,  $f(X, t)$  是一个与状态变量  $X$  和时间  $t$  有关的非线性函数. 根据文献 [12~14], 令  $H^2(I)$  为定义在  $I = [0, L]$  上的 Sobolev 空间, 则  $H^2(I)$  可表示为子空间  $W_{-1}, W_0, W_1, \dots, W_j, \dots$  的直和, 即

$$H^2(I) = W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \dots \quad (4)$$

其中符号  $\oplus$  表示直和. 因此, 电路的每一个状态变量  $X_i(t)$  均可以在空间  $W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j$  中展开, 近似的表示成该空间基函数的线性组合, 有

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N1} & \dots & C_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1(t) \\ \vdots \\ B_M(t) \end{bmatrix} = C \cdot B(t) \quad (5)$$

其中,  $B_i(t), i = 1, 2, \dots, M$  为空间  $W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j$  的基函数, 它们的具体定义可参见 [12~14], 本文不再赘述;  $C_{ij}, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$  为基函数系数. 显然,  $J$  越大, 即用高阶小波逼近  $X(t)$ , 则误差越小. 将式(5)代入式(3), 并对于子空间  $W_j$  取采样点<sup>[12~14]</sup>

$$\begin{cases} t = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, L-1, L - \frac{1}{2}, L & (j = -1) \\ t = \frac{1}{2^{j+2}}, \frac{1.5}{2^j}, \dots, \frac{2L-1.5}{2^j}, L - \frac{1}{2^{j+2}} & (j \geq 0) \end{cases} \quad (6)$$

有

$$C \cdot \left[ \frac{dB(t_1)}{dt} \dots \frac{dB(t_M)}{dt} \right] = [f(CB(t_1), t_1) \dots f(CB(t_M), t_M)] \quad (7)$$

其中,  $\{t_1, t_2, \dots, t_M\}$  是空间  $W_j, j = -1, 0, 1, \dots, J$  的所有采样点  $t_i$  的集合. 通过迭代求解方程(7)即可得到基函数的各个系数  $C$ , 进而获得状态方程(3)的解  $X = CB(t)$ .

### 2.2 小波平衡法的基本原理

对于由式(3)描述的非线性动态电路, 令其稳态响应周期为  $T$ , 则将时域区间  $[0, T]$  通过线性变换映射到模拟区间  $[0, L]$  上, 有

$$l = K \cdot t \quad (8)$$

其中,  $t \in [0, T], l \in [0, L]$ 、常数  $K = L/T$ . 将式(8)代入式(3), 得到状态方程

$$K \cdot \frac{dX}{dl} = f \left( X, \frac{l}{K} \right) \quad (9)$$

将上式中的状态变量  $X(l)$  用基函数  $B_1(l), B_2(l), \dots, B_M(l)$  展开, 通过与式(5~7)类似的推导, 有

$$K \cdot C \cdot \left[ \frac{dB(l_1)}{dl} \dots \frac{dB(l_M)}{dl} \right] = \left[ f \left( CB(l_1), \frac{l_1}{K} \right) \dots f \left( CB(l_M), \frac{l_M}{K} \right) \right] \quad (10)$$

另一方面, 考虑到电路在稳态响应时期应满足边界条件(1), 因此有

$$C \cdot B(0) = C \cdot B(L) \quad (11)$$

综合式(10)、(11), 定义代价函数

$$Q = \left\| \begin{bmatrix} CB(0) - CB(L) & KC \frac{dB(l_1)}{dl} - f \left( CB(l_1), \frac{l_1}{K} \right) \\ \dots & KC \frac{dB(l_M)}{dl} - f \left( CB(l_M), \frac{l_M}{K} \right) \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (12)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示求取矩阵的 F-范数. 可以看到, 当代价函数  $Q$  达到最小值 0 时, 方程式(10)、(11)成立.

对于非自治电路, 稳态响应周期  $T$  由输入激励信号决定, 所以式(8)中的参数  $K$  已知, 通过优化式(12)的代价函数  $Q$  就可以得到系数矩阵  $C$  和电路的稳态响应解

$$X(t) = CB(Kt) \quad (13)$$

对于自治电路, 状态方程(9)中的非线性函数  $f(X, l/K)$  只与状态变量  $X$  有关, 因此式(12)的代价函数可简化为

$$Q = \left\| \begin{bmatrix} CB(0) - CB(L) & KC \frac{dB(l_1)}{dl} - f(CB(l_1)) \\ \dots & KC \frac{dB(l_M)}{dl} - f(CB(l_M)) \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (14)$$

在此, 电路振荡周期  $T$  未知, 所以上式中的参数  $K$  必须和系数矩阵  $C$  一起通过优化迭代求解. 得到  $K$  和  $C$  的值后, 电路的稳态响应解同样由式(13)给出.

综上所述, Wavelet Balance 的实质是通过优化选择一组合适的小波系数  $C$ , 使由小波基函数逼近的状态变量  $X(t)$  满足原电路状态方程, 并且在边界点上  $X(t)$  达到“平衡”, 即有  $X(0) = X(T)$ .

### 2.3 自适应算法

文献[12~14]指出模拟结果的小波系数大小与逼近误差成正比, 系数幅值随小波阶数  $j$  的上升而下降, 因此可以根据  $j$  阶小波系数的大小来判断是否需要增加模拟阶数. 如果  $j$  阶小波系数的幅值大于某一门限  $\varepsilon$ , 则增加模拟阶数  $J$  至  $j', j' > J$ ; 否则, 保持原有阶数  $J$ . 而且, 由于小波基函数的紧支柱性<sup>[12~14]</sup>, 所以只需在  $X(t)$  变化较快(即含有高频成份)的区域增加基函数阶数, 不必在整个模拟区间  $[0, L]$  上使用统一的阶数  $J$ . 可见, 由于自适应算法的存在, Wavelet Balance 可以自动判定在给定模拟精度下需要的小波逼近阶数, 这是 WB 比其他稳态模拟算法更为优越之处.

## 3 与传统方法的比较

与 Shooting Method 相比, 本文的 Wavelet Balance 没有象前者那样通过复杂的数值积分来仅仅得到一个特定的初始状态  $X(0)$ , 而是通过调整小波系数  $C$ , 使由小波基函数逼近的状态变量  $X(t)$  满足原电路状态方程, 并且在边界点上  $X(t)$  达到“平衡”, 即有  $X(0) = X(T)$ .

与 Harmonic Balance Method 相比, 为了达到足够的精度, HB 算法需要取很高的谐波次数, 反复进行 DFT 和 IDFT 变换时需要的采样点数很多. 一般, 在固定的周期性激励下, 电路的谐波成份来自两个方面: (a) 电路中的非线性元件; (b) 输入激励信号本身含有的谐波成份. 以往的许多文献中, 往往只考虑非线性元件的影响, 而假定输入激励是一个单频的正弦信号. 但是, 在一些实际应用场合下, 输入信号本身就含有

丰富的谐波成份, 这导致 HB 算法变得更为复杂. 相反, 本文的 Wavelet Balance 由于在时域中求解非线性电路, 因此能有效的解决在频域中无法被直接分析的电路非线性和高次谐波等问题. 并且, WB 算法有很快的逼近速度, 等于  $O(h^4)^{[12-14]}$ ,  $h$  为采样步长, 这从理论上表明该算法只需要比较少的采样点(即比较少的基函数)就能达到足够的精度.

与 Sample Balance Method 相比, 以往的 SB 算法均未系统的给出一组正确、有效的基函数形式. 例如, 文献[9]的 SB 算法以正弦函数作为基函数, 显然其逼近效果较差. 另外, 文献[8]虽然提出用样条函数做基函数的思想, 但是该方法难以通过自适应算法自动判定需要的基函数个数. 本文的 WB 算法采用小波函数作为基函数, 因此存在一个自适应算法自动选择需要的小波阶数. 事实上, 这种自适应算法的本质就是小波理论中的多分辨分析(MRA)<sup>[15]</sup>, 即可以通过提高分辨率来得到更为精确的模拟结果.

### 4 模拟结果

#### 4.1 整流滤波电路

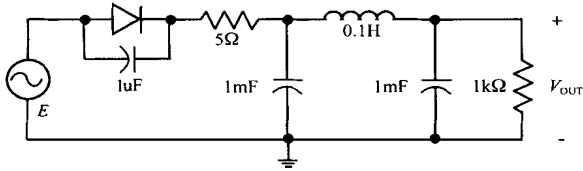


图 1 整流滤波电路

图 1 的整流滤波电路在许多文献中被用于测试各种稳态响应模拟算法<sup>[3, 10]</sup>.

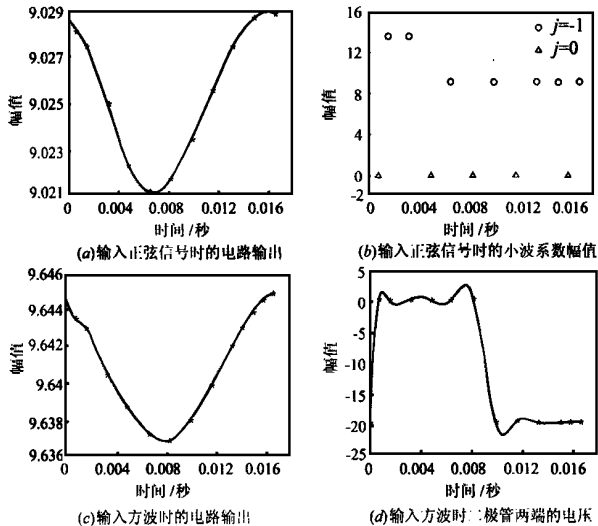


图 2 整流滤波电路的模拟结果

首先, 令输入激励  $E$  为幅度等于 10V、频率等于 60Hz 的正弦信号, 并取  $L = 5, J = 0$ , 得到如图 2(a) 的模拟结果. 在此, 总共用到的采样点数等于 13, 远少于其他的传统方法, 这说明本文的 Wavelet Balance 的确具有很低的运算复杂度. 图 2(b) 给出了模拟结果的小波系数幅值分布. 可以看到,  $j = 0$  阶小波的系数非常接近于 0, 因此已没有必要继续增加小波阶

数  $J$  进行模拟.

其次, 令输入激励  $E$  为幅度等于 10V、频率等于 60Hz 的方波, 这时输入激励信号本身包含了丰富的高频谐波成份. 同样取  $L = 5, J = 0$ , 得到如图 2(c)、2(d) 的模拟结果, 采样点数仍等于 13. 根据图 2(d) 可见, 当输入为方波时电路中的高频谐波成份很丰富, 这必将导致传统的 Harmonic Balance Method 变得十分复杂, 但本文的 Wavelet Balance 在时域中仍能够给出很好的模拟结果.

#### 4.2 Van Der Pol 振荡器

图 3 给出了 Van Der Pol 振荡器的电路结构, 其中非线性函数  $F(w) = 5 \times (w - w^3/3)$ . 文献[5][7][11]均采用该振荡器测试稳态响应模拟算法对非线性自治电路的模拟效果.

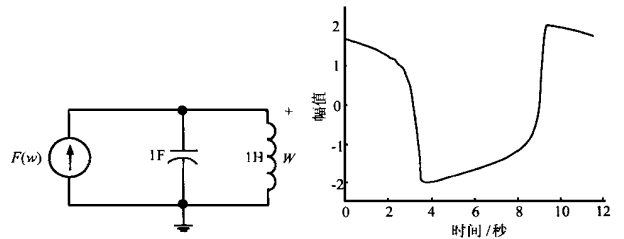


图 3 Van Der Pol 振荡器 图 4 Van Der Pol 振荡器的模拟结果(63 个采样点)

令  $J = 0$ , 并分别取  $L = 10, 20, 30$ , 在 3 种不同的模拟条件下用到的采样点数分别为 23、43 和 63, 得到的振荡周期  $T$  分别等于 11.51、11.57、11.61, 图 4 给出了  $L = 30$  的模拟结果.

与文献[11]相比, 在采样点数相同的条件下, 本文的 Wavelet Balance 在振荡周期  $T$  计算精度和输出波形精度两个方面均比文献[11]的方法更有效. 特别的, 根据振荡周期  $T$  的模拟结果可见, 在采样点很少的情况下 WB 算法可以获得很高的精度, 这十分利于在本文的自适应算法中以低阶小波的模拟结果作为高价小波模拟的初始值, 因为象许多文献<sup>[5, 7, 11]</sup> 指出的那样, 对于自治电路的模拟在优化代价函数时往往需要预先对未知量有一个近似估计, 这样才能得到正确、快速的优化结果.

### 5 结论

本文将 FWCM<sup>[12-14]</sup> 用于求解具有特殊边界条件限制的电路状态方程, 提出通过小波基函数在边界点上达到“平衡”来计算非线性电路稳态响应的思想, 并构造了一种新的稳态模拟算法——Wavelet Balance Method. 由于该算法在时域中求解非线性电路稳态响应, 因此避免了许多在频域中无法直接有效解决的问题. 并且, 由于小波本身在时域中有很快的逼近速度<sup>[12-14]</sup>, 从而在理论上保证了本文的 WB 算法只需要比较少的采样点(即比较少的基函数)就能达到很高的精度, 这一点通过本文最后的两个典型实例得到了证实. 最后, 基于小波的多分辨率分析理论, 本文的 Wavelet Balance 存在一个自适应算法来自动判断在给定的计算精度要求下需要的小波逼近阶数, 这也是该方法的一个很大的优越性. 综上所述, 对于求解非线性电路稳态响应问题, 本文的 Wavelet Balance 是一种

比其他传统方法更为有效的时域算法.

#### 参考文献:

- [ 1 ] K S Kundert. Introduction to RF simulation and its application [ J ]. IEEE Journal of Solid State Circuits, 1999, 34( 9 ): 1298- 1319.
- [ 2 ] L O Chua and P M Lin. Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithm, and Computational Techniques [ M ]. Englewood Cliffs, Nj: Prentice Hall, 1975.
- [ 3 ] T J Aprille Jr, T N Trick. Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs [ J ]. Proc. IEEE, 1972, 60: 108- 114.
- [ 4 ] S Skelboe. Computation of the periodic steady state response of nonlinear circuits by extrapolation methods [ J ]. IEEE Trans. CAS, 1980, 37( 3 ): 161- 175.
- [ 5 ] J R Parkhurst and L L Ogborn. Determining the steady state output of nonlinear oscillatory circuits using Multiple shooting [ J ]. IEEE Trans. CAD, 1995, 14( 7 ): 882- 889.
- [ 6 ] K S Kundert and A Sangiovanni-Vincentelli. Simulation of nonlinear circuits in the frequency domain [ J ]. IEEE Trans. CAD, 1986, 5: 521- 535.
- [ 7 ] P Palá Schönwalder and J M Miró Sans. A discrete time approach to the steady state analysis of nonlinear autonomous circuits [ J ]. Int. J. Circuit Theory Appl., 1994, 23: 297- 310.
- [ 8 ] F Filicori, M R Scalas and C Naldi. Nonlinear circuit analysis through periodic spline approximation [ J ]. Electron. Lett., 1979, 15( 19 ): 597- 599.
- [ 9 ] P J C Rodrigues, M J Howes and J R Richardson. Efficient computation of the steady state response of periodic nonlinear microwave circuits using a convolution based sample balance technique [ J ]. IEEE Trans. MIT, 1991, 39( 4 ): 732- 737.
- [ 10 ] D R Frey and Orhan Noman. An integral equation approach to the periodic steady state problem in nonlinear circuits [ J ]. IEEE Trans. CASI, 1992, 39( 9 ): 744- 755.
- [ 11 ] D R Frey. A class of relaxation algorithms for finding the periodic steady state solution in nonlinear system [ J ]. IEEE Trans. CASI, 1998, 45( 6 ): 659- 663.
- [ 12 ] W Cai and J Z Wang. Adaptive multi resolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear PDE s [ J ]. SIAM J. Numer. Anal., 1996, 33( 3 ): 937- 970.
- [ 13 ] Dian Zhou and Wei Cai. A fast wavelet collocation method For high-speed circuit simulation [ J ]. IEEE Trans. CASI, 1999, 46( 8 ): 920- 930.
- [ 14 ] Dian Zhou, Wei Cai and Wu Zhang. An adaptive wavelet method for nonlinear circuit simulation [ J ]. IEEE Trans. CASI, 1999, 46( 8 ): 931- 938.
- [ 15 ] C K Chui. An Introduction to Wavelets [ M ]. Academic Press, New York, San Diego, 1992.

#### 作者简介:



李 昕 男. 1977 年 8 月出生于浙江湖州. 现在复旦大学电子工程系攻读硕士学位, 从事信号处理, 人工神经网络, 电路设计优化和系统模拟等领域的研究.



胡 波 男. 1968 年 12 月出生于四川成都. 1996 年获复旦大学电子工程系博士学位. 现任复旦大学电子工程系副教授, 主要研究领域有数字信号处理、通信、电路分析与设计.

凌雯亭 男. 1932 生于江苏常州. 复旦大学教授、博导, 从事电路容差分析、集成电路分析与设计、信号盲识别与盲分离、滤波器设计理论、神经网络以及混沌理论与应用等领域的研究.